MAT 479 DÖNÜŞÜMLER VE GEOMETRİLER ARASINAV CEVAP ANAHTARI (30.11.2022)

1.) $L \ldots \begin{cases} x' = 2x - y + 3 \\ y' = -x + y - 1 \end{cases}$ dönüşümü veriliyor.

L nin inversi var ise bulunuz**(20 P.).**

Çözüm: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$ olduğundan L^{-1} vardır. L nin denklemlerinden

$$2x - y = x' - 3 \quad \cdots (1)$$
$$-x + y = y' + 1 \quad \cdots (2)$$

bulunur. Bu iki denklemi taraf tarafa toplarsak

$$x = x' + y' - 2$$

ve x değerini (2) denkleminde yerine yazarsak

$$y = x' + 2y' - 1$$

bulunur. Buna göre,

$$L^{-1} \ldots \begin{cases} x = x' + y' - 2 \\ y = x' + 2y' - 1 \end{cases}$$

dir.

2.) Orijin etrafındaki dönmelerin uzaklığı koruyup-korumadığını araştırınız**(20 P.)**.

Çözüm: Orijin etrafındaki α açılı bir dönme denkleminin

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz.

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ noktalarının resimleri

$$P' = R(P) = (x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha,\ x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha)$$

ve

$$Q' = R(Q) = (x_2\cos\alpha - y_2\sin\alpha,\ x_2\sin\alpha + y_2\cos\alpha)$$

dir. Buna göre,

$$d(P', Q') = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2}$$

$$= \sqrt{(x_2\cos\alpha - y_2\sin\alpha - x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha)^2 + (x_2\sin\alpha + y_2\cos\alpha - x_1\sin\alpha - y_1\cos\alpha)^2}$$

$$= \left[\left((x_2 - x_1)\cos\alpha + (y_1 - y_2)\sin\alpha\right)^2 + \left((x_2 - x_1)\sin\alpha + (y_2 - y_1)\cos\alpha\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \Big[(x_2 - x_1)^2\cos^2\alpha + 2(x_2 - x_1)(y_1 - y_2)\sin\alpha\cos\alpha + (y_1 - y_2)^2\sin^2\alpha$$

$$+ (x_2 - x_1)^2\sin^2\alpha + 2(x_2 - x_1)\underbrace{(y_2 - y_1)}_{-(y_1 - y_2)}\sin\alpha\cos\alpha + (y_2 - y_1)^2\cos^2\alpha\Big]^{1/2}$$

$$= \left[(x_2-x_1)^2\underbrace{(sin^2\alpha+cos^2\alpha)}_{1}+\underbrace{(y_2-y_1)^2}_{(y_1-y_2)^2=(y_2-y_1)^2 old.}(y_2-y_1)^2\underbrace{(sin^2\alpha+cos^2\alpha)}_{1}\right]^{1/2}$$

$$\Rightarrow d(P',Q') = [(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]^{1/2} = d(P,Q)$$

3.) Bir dönmenin dönme açısı $\pi/2$ ise bu dönmenin her doğruyu kendine dik bir doğruya dönüştürdüğünü gösteriniz**(20 P.)**.

Çözüm: O' noktası etrafında α açılı bir dönme denkleminin

$$R_{O'} \cdots \begin{cases} x' = xcos\alpha - ysin\alpha + a \\ y' = xsin\alpha + ycos\alpha + b \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. $\alpha = \frac{\pi}{2}$ olduğundan

$$R_{O'} \cdots \begin{cases} x' = -y + a \\ y' = x + b \end{cases}$$

elde edilir.

$d \cdots y = mx + n$ doğrusunu alalım. d doğrusunun R_o dönmesi altındaki resmine d' dersek

$$d' \cdots -x' + a = m(y' - b) + n, m \neq 0, \Rightarrow y' = -\frac{1}{m}x' + \frac{1}{m}(a + mb - n)$$

bulunur.

$m_d = m$ ve $m_{d'} = -\frac{1}{m}$ olduğundan $m_d . m_{d'} = -1$. O halde $d \perp d'$ dir.

NOT: Dönme denklemi olarak orijin etrafındaki

$$R_O \cdots \begin{cases} x' = xcos\alpha - ysin\alpha \\ y' = xsin\alpha + ycos\alpha \end{cases}$$

dönme denklemi de alınabilir.

4.) Orijin etrafında bir dönmeden sonra bir ötelemenin bileşkesi, dönme merkezi $(1{,}0)$ ve dönme açısı $\pi/2$ olan bir dönmedir. Bu dönme ve ötelemeyi bulunuz**(20 P.)**.

Çözüm: Dönme merkezi $(1{,}0)$ ve dönme açısı $\pi/2$ olan dönmeyi bulalım:

$$R_1 \ldots \begin{cases} x'' = xcos\alpha - ysin\alpha + a \\ y'' = xsin\alpha + ycos\alpha + b \end{cases}$$

olduğunu biliyoruz. Burada,

$$\begin{cases} a = h(1 - cos\alpha) + ksin\alpha \\ b = k(1 - cos\alpha) - hsin\alpha \end{cases}$$

dır. Verilen değerler yukarıdaki denklemlerde yerlerine yazılırsa

$$R_1 \ldots \begin{cases} x'' = -y + a \\ y'' = x + b \end{cases}, \quad \begin{cases} a = 1.\left(1 - cos\frac{\pi}{2}\right) + 0.sin\frac{\pi}{2} = 1 \\ b = 0.\left(1 - cos\frac{\pi}{2}\right) - 1.sin\frac{\pi}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_1 \ldots \begin{cases} x'' = -y + 1 \\ y'' = x - 1 \end{cases}$$

elde edilir.

Orijin etrafında α açılı bir dönme,

$$R \ldots \begin{cases} x' = xcos\alpha - ysin\alpha \\ y' = xsin\alpha + ycos\alpha \end{cases}$$

ve öteleme denklemi

$$T \ldots \begin{cases} x'' = x' + a \\ y'' = y' + b \end{cases}$$

olduğundan

$$TR = R_1 \Leftrightarrow TR \ldots \begin{cases} x'' = xcos\alpha - ysin\alpha + a \\ y'' = xsin\alpha + ycos\alpha + b \end{cases}$$

olduğuna göre

$$\left.\begin{matrix} x'' = xcos\alpha - ysin\alpha + a = -y + 1 \\ y'' = xsin\alpha + ycos\alpha + b = x - 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = 1, b = -1 \text{ ve } \alpha = \frac{\pi}{2}$$

bulunur. Buna göre,

$$R \ldots \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases} \quad \text{ve} \quad T \ldots \begin{cases} x'' = x' + 1 \\ y'' = y' - 1 \end{cases}$$

dir.

5.) $A(1,5)$ noktasını $A(3,3)$ noktasına götüren iki katı hareket bulunuz**(20 P.)**.

Çözüm: Öteleme vektörü $\overrightarrow{AA'} = A' - A = (3,3) - (1,5) = (2,-2)$ olan

$$T\ ...\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y - 2 \end{cases}$$

ötelemesi

ve

$$I(h,k) = \frac{A + A'}{2} = \frac{(1,5) + (3,3)}{2} = (2,4)$$

olmak üzere $I(h,k)$merkezli π dönme açılı

$$R\ ...\begin{cases} x' = xcos\alpha - ysin\alpha + h(1 - cos\alpha) + ksin\alpha \\ y' = xsin\alpha + ycos\alpha k + (1 - cos\alpha) - hsin\alpha \end{cases}$$

den

$$R\ ...\begin{cases} x' = xcos\pi - ysin\pi + 2.(1 - cos\pi) + 4.sin\pi \\ y' = xsin\pi + ycos\pi + 4.(1 - cos\pi) - 2.sin\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow R\ ...\begin{cases} x' = & -x + 4 \\ y' = & -y + 8 \end{cases}$$

dönmesi A yı A'ye götüren iki katı harekettir.

Prof. Dr. Ayhan TUTAR